Corrigé du Bac Blanc de

Terminale STL

Jean-Paul DAVALAN
jpdavalan@wanadoo.fr

18 mars 2002

Exercice (8 points)

Un club de vacances est constitué de 300 adhérents qui pratiquent chacun une activité et une seule parmi les suivantes : la natation, l'escalade ou le VTT.

- 35 % des adhérents sont des filles.
- 30 % des adhérents pratiquent le VTT.
- 10 % des adhérents pratiquent l'escalade et parmi eux 60 % sont des garçons.
- Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

	Natation	Escalade	VTT	Totaux
Nombre de filles	63	12	30	105
Nombre de garçons	117	18	60	195
Totaux	180	30	90	300

Le nombre de filles est de $300 \times 35\% = 3 \times 35 = 105$, le nombre de garçons est $300 - 105 = 195$.
Le VTT est pratiqué par $300 \times 30\% = 90$ adhérents
L'escalade est pratiquée par $300 \times 10\% = 30$ adhérents, parmi ces derniers $30 \times 60\% = 18$ sont des garçons et donc $30 - 18 = 12$ sont des filles.

Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT donc les $\dfrac{2}{2+1}$ sont des garçons :
$90 \times \dfrac{2}{3} = 60$ garçons et $90 \times \dfrac{1}{3} = 30$ filles pratiquent le VTT.

On en déduit que $300 - (30+90) = 180$ adhérents pratiquent la natation dont $105 - (12+30) = 63$ filles et $195 - (18+60) = 117$ garçons.

Les résultats seront présentés sous forme d'une fraction irréductible puis de valeur décimale approchée à 10^{-3} près.
2. Soit F l'événement « Cet adhérent est un garçon », E l'événement « Cet adhérent pratique l'escalade » et enfin N l'événement « Cet adhérent pratique la natation ».
Exprimer sous forme de phrases les événements suivants :
a. $F \cap E$ b. $F \cup E$ c. $\overline{N}$ d. $\overline{F} \cap \overline{N}$.
On choisit au hasard un adhérent de ce club, calculer les probabilités des quatre événements ci-dessus.
Il y a équiprobabilité, on calcule la probabilité d'un événement quelconque S en effectuant le quotient
$p(S) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Dans les questions 2 et 3 le nombre de cas favorables est 300 d'où $p(S) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } S}{300}$.

a. $F \cap E =$ « Cet adhérent est un garçon qui pratique l'escalade ». $p(F \cap E) = \dfrac{18}{300} = \dfrac{3}{50} = 0,06$.

b. $F \cup E =$ « Cet adhérent est un garçon ou pratique l'escalade ».
$p(F \cup E) = \dfrac{117+18+60+12}{300} = \dfrac{195+12}{300} = \dfrac{207}{300} = \dfrac{69}{100} = 0,69$.
Ou encore $p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) = \dfrac{195}{300} + \dfrac{30}{300} - \dfrac{18}{300} = \dfrac{69}{100} = 0,69$.

c. $\overline{N} =$ « Cet adhérent ne pratique pas la natation ».

$\overline{N}$ est l'événement contraire de l'événement N, on a $p(\overline{N}) = 1 - p(N)$ et donc :
$p(\overline{N}) = 1 - \dfrac{180}{300} = \dfrac{120}{300} = \dfrac{2}{5} = 0,4.$

d. $\overline{F} \cap \overline{N}$ = « Cet adhérent est une fille qui ne pratique pas la natation » = « Cet adhérent est une fille qui pratique l'escalade ou le VTT ».
$p(\overline{F} \cap \overline{N}) = \dfrac{12+30}{300} = \dfrac{42}{300} = \dfrac{7}{50} = 0,14.$

3. On choisit au hasard un adhérent de ce club. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
A : « Cet adhérent est une fille qui pratique la natation ou un garçon qui ne pratique pas la natation ».
$p(A) = p((\overline{F} \cap N) \cup (F \cap \overline{N})) = \dfrac{63+18+60}{300} = \dfrac{141}{300} = \dfrac{47}{100} = 0,47.$

4. a. On choisit un garçon au hasard, calculer la probabilité que ce garçon pratique l'escalade.
La probabilité qu'un garçon pratique l'escalade est :

$$\frac{\text{nombre de garçons pratiquant l'escalade}}{\text{nombre de garçons}} = \frac{18}{195} = \frac{6}{65} = 0,092 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

b. On choisit au hasard un adhérent qui pratique la natation, calculer la probabilité que cet adhérent soit une fille.

La probabilité qu'un adhérent pratiquant la natation soit une fille est :
$$\frac{\text{nombre de filles pratiquant la natation}}{\text{nombre d'adhérents pratiquant la natation}} = \frac{63}{180} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

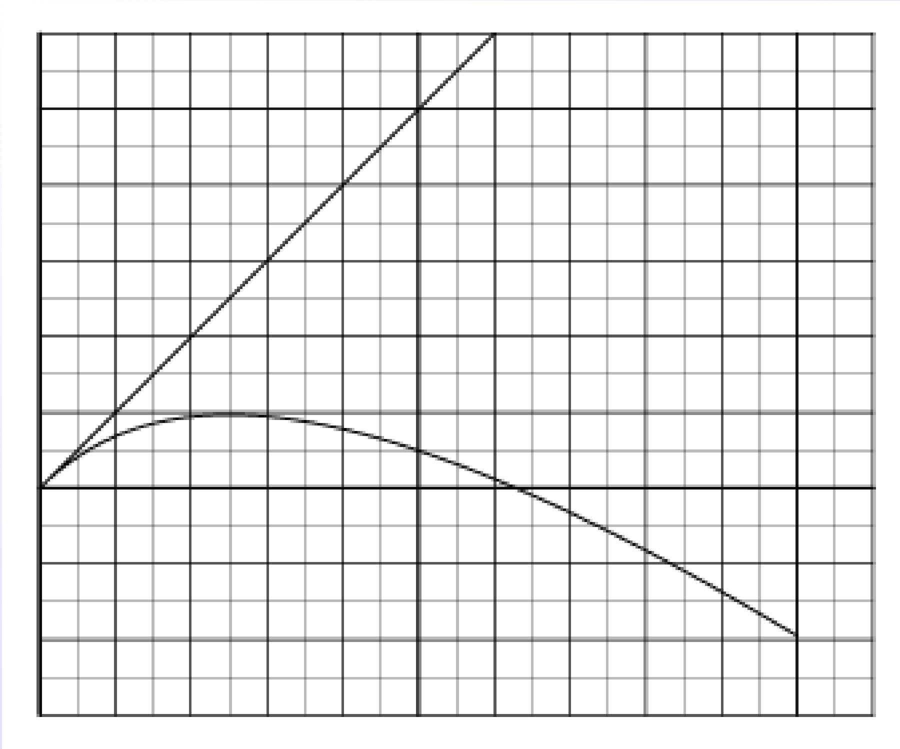
Problème (12 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\ 2]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

Partie A

La courbe représentative (C) de f est donnée dans le repère orthonormal $(O\ \vec{i},\ \vec{j})$ par le graphique ci-dessous.



On précise que la droite (T) passant par le point O et le point de coordonnées $(1 ; 1)$ est tangente à (C) en O.

1. En utilisant ce graphique, donner la valeur de $f(0)$ et expliquer pourquoi $f'(0) = 1$.

La courbe C passe par l'origine O du repère, on a donc $f(0) = 0$.
La tangente en O à la courbe C est la droite T. la tangente T passe par le point O de coordonnées $(0\,;\,0)$ et par le point P de coordonnées $(1\,;\,1)$, son coefficient directeur est donc $\dfrac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$.

2. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = a\,x + \ln(2\,x + b)$, où a et b désignent deux nombres réels.

a. En utilisant la valeur trouvée pour $f(0)$, calculer b.

Comme $f(0) = 0$, en remplaçant x par 0 dans $f(x) = a\,x + \ln(2\,x + b)$ on a $0 = a \times 0 + \ln(2 \times 0 + b)$ soit $0 = \ln b$ qui a pour solution $b = 1$.

b. Démontrer que $f'(x) = a + \dfrac{2}{2\,x+1}$.

On sait que $\ln u$ a pour dérivée $\dfrac{u'}{u}$, en posant $u = 2\,x + 1$, on a $u' = 2$ et donc $f'(x) = a + \dfrac{2}{2\,x+1}$.
En utilisant la valeur trouvée pour $f'(0)$, calculer a.
On a vu que la droite T a pour coefficient directeur 1 et que T est tangente en O à la courbe C. On a donc $f'(0) = 1$.
En remplaçant x par 0 dans $f'(x) = a + \dfrac{2}{2\,x+1}$, on obtient $1 = a + \dfrac{2}{1}$ ce qui donne $a = -1$.

c. En déduire l'expression de $f(x)$.

On en déduit que $f(x) = -x + \ln(2\,x + 1)$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f est définie sur $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = -x + \ln(2\,x + 1)$.

1. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,2]$, $f'(x) = \dfrac{-2\,x+1}{2\,x+1}$.

La dérivée de $f(x) = -x + \ln(2\,x+1)$ est $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{2\,x+1}$ et en réduisant au même dénominateur $f'(x) = \dfrac{-2\,x-1}{2\,x+1} + \dfrac{2}{2\,x+1} = \dfrac{-2\,x-1+2}{2\,x+1}$ et donc $f'(x) = \dfrac{-2\,x+1}{2\,x+1}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,2]$.
Comme $x \in [0\,;\,2]$, x est positif et donc $2\,x+1$ est strictement positif. On en déduit que $f'(x)$ a le signe de $-2\,x+1$. $f'(x)$ s'annule au point $x = \dfrac{1}{2}$.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{1}{2} & & 2 \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
 & & & f\left(\frac{1}{2}\right) & & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & f(2)
\end{array}
$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \text{ et } f(2) = -2 + \ln 5.$$

2. a. Reproduire le tableau suivant et le compléter par les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près de $f(x)$.

x	$0,5$	1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$	2
$f(x)$	$0,19$	$0,10$	$0,06$	$0,02$	$-0,02$	$-0,06$	-0.11	$-0,39$

Remarque : $f(1,4) = -0,06499893...$ d'où $f(1,4) = -0,06$ à 10^{-2} près.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine α et une seule dans l'intervalle $[0,5\,;\,2]$. donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de α.

La fonction f

- est définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,2]$,
- est dérivable sur $[0,5\,;\,2]$,
- est strictement décroissante sur $[0,5\,;\,2]$,
- vérifie $f(0,5) \geq 0$ et $f(2) \leq 0$,

donc l'équation $f(x) = 0$ possède une racine et une seule dans l'intervalle $[0,5\,;\,2]$.

On appelle α cette racine, d'après le tableau de valeurs, on a $1,2 \leq \alpha \leq 1,3$.

3. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 de (C).

$f(1) = -1 + \ln 3$ et $f'(1) = \dfrac{-2+1}{2+1} = \dfrac{-1}{3}$ donc la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \dfrac{-1}{3}(x-1) - 1 + \ln 3$, soit encore :

$$\Delta \ : \quad y = \frac{-1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3.$$